Matrizen

Hier: nur quadratisch $\mathbf{A} = \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Matrix — Matrixelemente

Vektor = Matrix mit einer Spalte

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\underline{E} = \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen und Vektoren:

$\underline{A}\,\vec{x} = \vec{b}$

$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

Lineares Gleichungssystem

Koeffizientenmatrix $\underline{A}$

Rechte Seite $\vec{b}$

Lösungsvektor $\vec{x}$

Homogenes Gleichungssystem $\underline{A}\,\vec{x} = \vec{0}$

Hat nur dann eine nichttriviale Lösung, falls $|\underline{A}| = 0$

Determinante:

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \det |\underline{A}|$$

Definition:

$$|\underline{A}| = \sum_{P} (-1)^{P} \prod_{i=1}^{n} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \dots a_{np_n}$$

n=2 $|\underline{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3 $|\underline{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$
$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Sonst: Entwicklung nach Unterdeterminanten, Regel von Sarrus, Computer

Eigenwertproblem:

$$\underline{A}\,\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Geometrische Deutung ?

Gesucht: Eigenwerte λ und zugehörige Eigenvektoren $\vec{x}$

$$\underline{A}\,\vec{x} = \lambda \underline{E}\,\vec{x}$$

$$\underline{A}\,\vec{x} - \lambda \underline{E}\,\vec{x} = \vec{0}$$

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E})\,\vec{x} = \vec{0} \qquad (4)$$

hat nur Lösungen, falls $|\underline{A} - \lambda \underline{E}| = 0$

Charakteristisches Polynom $P_n(\lambda) = 0$

hat n Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_n$

Jeden gesondert in (*) einsetzen führt zu einem Eigenvektor $\vec{x}_n$
mit jeweils n Komponenten

- Hermitesche (und damit auch symmetrische) Matrizen haben nur reelle Eigenwerte

- Entartung ist möglich

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1^2$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

Eigenvektoren:

1. $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$1x_1 - 1x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda_2 = +1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-1x_1 - 1x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$